# HUDBA A MATEMATIKA V KONTEXTE VÝVOJA DEJÍN HUDBY

MIRIAMA KOVAĽUKOVÁ

**Stupeň, forma, ročník štúdia:** Mgr., denná, 1.
**Študijný program:** učiteľstvo matematiky a hudobného umenia
**Konzultant:** doc. Mgr. art. Karol Medňanský, PhD.

**Kľúčové slová:** Pytagoras, temperované ladenie, zlatý rez, dodekafónia

## Úvod

*„Hudba je vedou, ktorá musí mať stanovené pravidlá. Tie však musia čerpať z evidentných princípov, len ťažko spoznateľných bez pomoci matematiky. Iba vďaka nej môže svetlo ožiariť temnotu, ktorej si predtým nik nebol vedomý a tak rozmotať mnohé zamotané myšlienky.“* (Jean-Philippe Rameau, hudobný teoretik 18. storočia)

Hudba s matematikou, matematika s hudbou. Iba tak to celé môže fungovať, o čom sa presvedčili mnohí hudobní teoretici, matematici, skladatelia či nadaní laici už dávno pred naším letopočtom. Množstvo otázok a problémov, ktoré vznikali na pozadí vývoja hudobného myslenia ich motivovalo k pátraniu a skúmaniu vzájomných vzťahov týchto dvoch disciplín. Napokon racionálnu a presnú kráľovnú vied nachádzali vo všetkých oblastiach hudby, ktorá je považovaná za stelesnenie ducha a prostriedok vyjadrenia najhlbších citov.

To, že dve polové noty tvoria notu celú, rovnako ako dve polovice pri sčítaní dávajú jednotku matematike nestačilo. Siahala a dodnes siaha do hudby omnoho hlbšie. Ani tónové vzťahy, hudobná forma či hudba 20. a 21. storočia sa nezaobišli bez matematiky, o čom svedčia aj nasledujúce kapitoly venované tejto problematike.

## 1 Matematika a tónové vzťahy

Matematika je vedou o štruktúrach, ich usporiadaniach a zákonitostiach. No aj hudba má svoju štruktúru. Bez nej by predsa bola len beztvarou zmesou zvukov.

Tu sa do popredia dostáva **tón** ako základná stavebná jednotka akéhokoľvek hudobného diela so svojimi štyrmi vlastnosťami: výškou, silou, farbou a dĺžkou. Tón však nerád stojí sám a preto spolu s ďalšími tónmi vytvára intervaly[1] či akordy. Práve intervaly zaodeté do mnohých nezodpovedaných otázok sa stali terčom experimentov Pytagora, Aristoxena a ďalších matematikov či hudobných teoretikov.

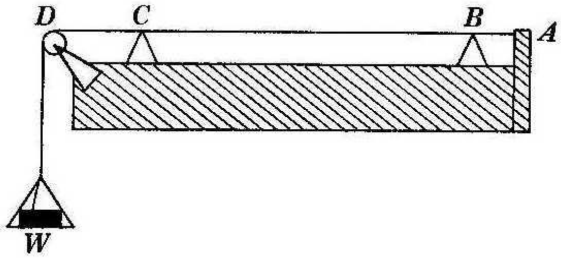
### 1.1 Pytagoras a teória hudobných intervalov

Starovekí Gréci, podľa Aristotela a Platóna, verili, že *„[...]Mesiac, Slnko, planéty a hviezdy sa nachádzajú na krištáľových sférach obiehajúcich okolo Zeme, pričom svojim pohybom produkujú hudbu“* (Jackson 2013, s. 15). Verili tiež, že hudba má liečivé účinky, o čom hovorí aj krátky príbeh o mužovi, ktorý bol piesňou vo frygickej tónine tak rozrušený, až uveril, že u jeho manželky je milenec. Chcel svoj dom podpáliť, avšak našťastie hráč prestal hrať vo frygickej tónine, čím sa muž upokojil a vrátil domov vyliečený (Marek 2000).

[1] Ide o výškovú vzdialenosť dvoch tónov.

**Pytagoras z ostrova Samos** (asi 580 – 500 p. n. l.) bol jedným z najvplyvnejších gréckych matematikov a mysliteľov, ktorý sa zaoberal zákonmi akustiky a harmónie. Kládol si otázku, či je možné vymyslieť pomocný nástroj, tak pevný a neomylný, pomocou ktorého by dokázal zmerať, ako človek počuje a tým sluch ako zmysel systematizovať (Marek 2000).

Využitím experimentov a matematiky zostrojil nástroj užitočný pre rôzne vedecké a hudobné pokusy, nazývaný **monochord**[2] - pozri obrázok 1.




Obrázok 1 Monochord
(Zdroj: TheMonocord 2015 – 2016-08-08 19:00)

Struna bola pripevnená na ozvučnici, v bode A, a naťahovaná závažím W cez kladku, bod D. V bodoch B a C boli pohyblivé kobylky, slúžiace dobrému počutiu a meraniu generovaných tónov. Pytagoras vyvažoval strunu rôzne ťažkými závažiami a rovnako začal strunu deliť alebo násobiť celými číslami. Pri svojich pokusoch zistil, že k intervalu *oktávy* dochádza iba vtedy, ak dĺžka jednej struny je dvojnásobok struny s pôvodnou dĺžkou, resp. ak dĺžka jednej struny je polovica dĺžky struny pôvodnej. Teda pomer je 2:1, resp. 1:2. Následne Pytagoras rozdelil celú strunu na tri rovnaké časti. Predpokladal, že dve nové výšky tónov, získané nerovnakými časťami struny budú vo vzťahu jednej *oktávy*[3]. Nová struna o dĺžke 2/3 celkovej dĺžky struny tak zvučala v intervale *kvinty* k pôvodnej strune a hudobná kvalita *čistej kvinty* zodpovedala matematickému pomeru 2:3. Na základe ustanovenia číselného pomeru *oktávy* a *kvinty* Pytagoras získal ďalšie intervaly a to prostredníctvom jednoduchých matematických vzťahov (Haluška 2006).

Ako príklad sa môže uviesť interval veľkej sekundy, získanej nasledovným spôsobom: interval medzi tónmi $c^1$ a $g^1$ bol *čistou kvintou*, čo platilo aj pre tóny $g^1$ a $d^2$. Pre porovnanie krajných tónov $c^1$ a $d^2$ stačilo vynásobiť dva kvintové intervaly a nezabudnúť tón $d^2$ transponovať o oktávu nižšie, pričom pomer základného tónu a tónu od neho o oktávu nižšie je 1:2 (Shah 2010). Násobenie vyzeralo nasledovne:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$$

Podobným spôsobom sa Pytagoras dopracoval k ostatným intervalom a ich celočíselným pomerom – pozri obrázok 2.

| tón | $c^1$ | $d^1$ | $e^1$ | $f^1$ | $g^1$ | $a^1$ | $h^1$ | $c^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frekvenčný pomer | 1 | 9:8 | 32:27 | 4:3 | 3:2 | 27:16 | 16:9 | 2 |

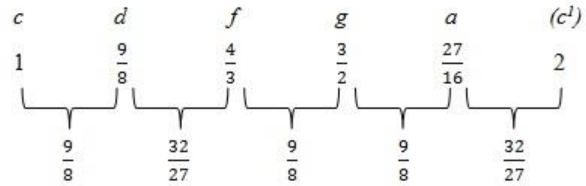
Obrázok 2 Tabuľka pomerov intervalov
(Zdroj: Shah 2010)

[2] Z gr. monochord = jedna struna.
[3] Dlhší úsek mal 2/3 celkovej dĺžky, kratší 1/3. Výsledný pomer kratšej struny k dlhšej bol teda pomer 1:2, čo je pomer *oktávy*.

### 1.1.1 Pytagorejská tónová sústava

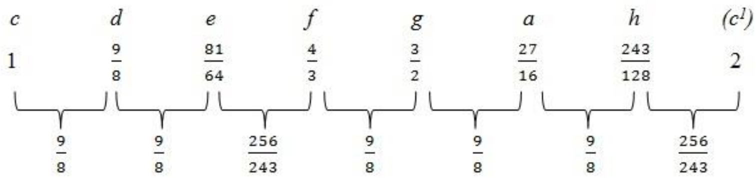
Hudobné intervaly a im prislúchajúce číselné pomery Pytagoras šikovne použil na zostrojenie tónovej sústavy podľa melodického princípu a s *kvintou* ako rozhodujúcim intervalom. Na základe tohto intervalu sa dané ladenie označovalo ako kvintové, resp. **pytagorejské**, kam spadá pentatonika – päťtónová stupnica a heptatonika – sedemtónová stupnica (Špelda 1978).

Cesta k takejto pentatonickej stupnici vyzerá nasledovne: ak si za základný tón zvolíme $c^1$ a vytvoríme tri kvintové kroky smerom nahor a jeden smerom nadol, dostaneme rad tónov $F - c - g - d^1 - a^1$. Tóny, ktoré presahujú malú oktávu preradíme do tejto oktávy, čím získame rad tónov $c - d - f - g - a$, pričom je nutné zohľadniť relatívnu výšku tónu $F$ k tónu $c$, podobne tónu $d^1$ k tónu $c$ a tiež tónu $a^1$ k tónu $c$. Navyše určením intervalov medzi susednými tónmi vzniká obraz pentatonickej stupnice (Špelda 1978) – pozri obrázok 3.




Obrázok 3 Pentatonika
(Zdroj: Špelda 1978)

Heptatoniku, podobne ako pentatoniku, vytvárame na základe kvintových krokov, v tomto prípade piatich krokov nahor a jedným krokom opačným smerom. Vzniká postupnosť $F - c - g - d^1 - a^1 - e^2 - h^2$, z ktorej už známym spôsobom dostaneme obraz pytagorejskej heptatoniky – pozri obrázok 4.




Obrázok 4 Heptatonika
(Zdroj: Špelda 1978)

Stavebnými kameňmi heptatoniky sa tak stali dva intervaly: *pytagorejský celý tón* – ***tonos*** a pomerom 9:8 a *malý pytagorejský poltón* – ***limma*** s pomerom 256:243.

Obe stupnice mali v starovekých národoch obrovský význam vďaka tomu, že čísla a zvlášť čísla 5 a 7 zohrávali vo vtedajšom svete veľkú úlohu, napríklad číslo päť udávalo počet zmyslov človeka, číslo sedem zase počet dovtedy známych planét, či počet dní v týždni. Aj harfy mávali päť alebo sedem strún a rovnaký bol aj počet chrámových hudobníkov (Špelda 1978).

### 1.2 Odklon od pytagorejského myslenia

Hudobná teória vystavaná členmi pytagorejskej školy sa pre svoju matematickú jednoduchosť udržala až po začiatky stredoveku. Avšak v hudbe, ktorá sa opierala o harmonický základ už nebola dostačujúca a preto sa museli uplatniť prednosti **tzv. aristoxenovskej sústavy** (Špelda 1978).

**Aristoxenos z Tarentu**, žiak Aristotela, žijúci okolo roku 350 p. n. l. v Aténach patril k najstarším hudobným teoretikom starovekého Grécka. Vo svojom hudobno-teoretickom diele *Elements of Harmony* vytvoril systematickú teóriu tónových sústav, ktoré pozostávali z tetrachordov. Tie vznikali rozdelením heptatoniky na dve skupiny po štyroch tónoch tak, aby v každej skupine okrajové tóny tvorili interval *kvarty*. Dané štvortónové skupiny dostali názov *tetrachordy* a šlo o prvé, aj keď len krátke tónové sústavy. Dlhšie tónové sústavy sa však dali poľahky vytvoriť spájaním tetrachordov do reťazí (Shah 2010).

Ak od každého tónu heptatoniky bol vytvorený tetrachord, ukázalo sa, že existujú len tri od seba odlišné typy tetrachordov a postavením dvoch tetrachordov nad seba vzniknú len tri od seba odlišné stupnice: *lydická*, *frygická* a *dórska*. Preložením vrchného tetrachordu do spodnej oktávy vznikali stupnice s predponou *hypo* a transponovaním spodného tetrachordu do vrchnej oktávy zase stupnice s predponou *hyper*. Týmto spôsobom vznikli stupnice: *hypolydická*, *hypofrygická (iónska)*, *hypodórska (aiolská)*, *hyperlydická*, *hyperfrygická*, *hyperdórska (mixolydická)* a spolu s prvými troma stupnicami nesú súhrnný názov stredoveké stupnice - mody (Špelda 1978).

Tzv. harmonici, zástupcovia Aristoxenovho učenia, sa opierali o hudobnú prax a brali do úvahy nie len interval kvinty a oktávy, ale aj interval tercie – veľkej a malej.

Raný stredoveký učenec **Boethius**, žijúci približne v rokoch 480 – 524 n. l. spôsobil chaos nesprávnym pochopením modov. Namiesto rozvláčnených gréckych názvov tetrachordov používal vo svojom diele *De institutione musica* (Základy hudby) k notácii grécke aj rímske písmená ako skratky. Tak bolo možné nazvať *hypate meson* (hypate zo stredného tetrachordu) jednoducho *D* a *parhypate meson E* a podobne (Abraham 2003).

**Alcuinus**, teoretik z obdobia karolínskej renesancie, ktorý žil v rokoch 753 až 804 podal na rozdiel od Boethia prvý teoretický výklad modov v západnej hudbe. Začal rozlišovať štyri typy tónin: *protus,* neskôr známy ako modus dórsky, *deuterus*, neskôr známy ako frygický, *tritus*, neskôr známy ako lydický, *tetrardus*, neskôr známy ako mixolydický.

K týmto štyrom autentickým modom pribudli aj štyri plagálne, vzniknuté transpozíciou o kvartu nižšie s predponou *hypo* (Ruščin 2001).

Švajčiarsky hudobný teoretik **Heinrich Glareanus** (1488 – 1563) v roku 1547 vo svojom diele *Dodekachordon* rozšíril už známy systém ôsmych modov o ďalšie štyri cirkevné tóniny: *aiolskú, hypoaiolskú*, *iónsku* a *hypoiónsku*. Šlo o posledný pokus záchrany starého systému stredovekých modov (Ruščin 2001).

**Gioseffo Zarlino** (1517 – 1590) bol talianskym skladateľom a známym hudobným teoretikom renesancie, ktorý sa vo svojom diele *Instituzioniharmoniche* z roku 1558 opieral opäť o Aristoxena a jeho školu. Fundamentálne kamene pytagorejskej sústavy, t.j. *oktávy* a *kvinty,* resp. *kvarty,* a pomery ich relatívnych výšok 1:2:3:4, rozšíril až k číslu 6, teda 1:2:3:4:5:6. V prípade, že sa z rozšíreného pomeru stali základnými intervalmi pre vznik stupnice *oktáva, kvinta* a *veľká tercia*, šlo o **durovú stupnicu** v prirodzenom ladení, ak veľkú terciu vystriedala *tercia malá*, šlo o **molovú stupnicu** tiež v prirodzenom ladení (Špelda 1978). Prirodzené aristoxenovské ladenie nieslo tiež názov **didymické čisté ladenie**.

Je zrejmé, že jednotlivé intervaly ľudskému uchu znejú najharmonickejšie vtedy, len ak ich frekvencie sú v pomere malých celých čísel. Z tohto dôvodu tie najkonsonantnejšie intervaly by mali mať pomer frekvencií didymického ladenia a tieto pomery sa dajú jednoducho získať aj matematicky, a to pomocou matematických priemerov – aritmetického a harmonického.

1. aritmetický $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
2. harmonický $H(a,b) = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$

Keďže pomer frekvencií dvoch tónov, ktoré tvoria oktávu je 2:1, vypočítaním oboch priemerov dostaneme pomery frekvencií intervalov *čistej kvinty* a *čistej kvarty*. Takto je možné rozdeliť napríklad oktávu, ale aj ďalšie intervaly (Makeig 1981 – 2016-08-09 9:15).

Prirodzené ladenie však nebolo práve najideálnejším riešením pre klávesové a dychové nástroje kvôli jemnému odtieňovaniu výšok tónov. Preto o niekoľko desiatok rokov neskôr sa zásluhou holandského fyzika **Simona Stevina** (1548 – 1620) a barokového organistu, skladateľa a hudobného teoretika, **Andreasa Werckmeistera** (1645 – 1706), začali formulovať prvé zákonitosti **rovnomerného temperovaného[4] ladenia**. Takmer o dve storočia neskôr, **Josef Petzval** (1807 – 1891) ako viedenský fyzik odvodil podmienku nutnú pre každú temperovanú sústavu. Išlo o podmienku o čo najmenej rozladených kvintách a terciách, čo viedlo až k zavedeniu temperatúr a vzniku dvoch rovníc s troma neznámymi. Výsledkom zložitých výpočtov bolo tvrdenie, že temperatúra kvinty musí byť súčinom temperatúr veľkej a malej tercie, čo je základnou podmienkou pre správne temperovanie (Špelda 1978).

[4] Z lat. temperare = mierniť, zmäkčovať, krotiť.

Rovnomerné temperované ladenie tak rozdeľovalo oktávu na dvanásť rovnakých poltónov, ktoré sa delili na ešte menšie jednotky, centy[5]. Sto centov prislúcha jednému poltónu, z čoho vyplýva, že oktáva obsahuje presne tisícdvesto centov. Prepočítanie frekvencie ľubovoľného intervalu na centy sa prevedie nasledovným vzorcom[6]:

$$f = 2^{\frac{x}{1200}} \quad \Rightarrow \quad x = 1200 \cdot \log_2 f$$

### 1.3 Kvintový a kvartový kruh

V hudobnej teórii pod pojmom kvintový a kvartový kruh rozumieme vizuálne reprezentovanie vzťahov medzi dvanástimi tónmi chromatickej stupnice, predznamenaní s nimi korešpondujúcimi a tiež durových a molových tónin s nimi spojenými. Kvintový a kvartový kruh sa spája s menom hudobného teoretika a skladateľa ukrajinskej národnosti, **Nikolaiom Diletskym** (cca 1630 – 1680), v ktorého diele *Grammatika* sa po prvý krát objavil kvintový kruh slúžiaci jeho študentom ako nástroj pre komponovanie.

Na mieste je však otázka: Prečo v hudobnej teórii neexistuje žiaden terciový, sextový, či iný kruh?

Odpoveď je vyjadrená nasledovným tvrdením: Nech stupnica má n tónov. Cyklickým pohybom po stupnici v krokoch o veľkosti m pokryjeme každý tón n danej stupnice vtedy a len vtedy, ak platí, že čísla m a n sú nesúdeliteľné, t.j. (m, n) = 1[7] (Cook 2009 – 2016-08-09 10:00).

Interval *čistej kvinty* v temperovanom ladení obsahuje sedem poltónov, celá oktáva má poltónov dvanásť. Dosadením týchto hodnôt do vzorca pre výpočet najmenšieho spoločného deliteľa dostávame (7,12) = 1. Záverom možno konštatovať, že čísla 7 a 12 sú nesúdeliteľné, preto interval čistej kvinty pokryje každý tón stupnice a teda existuje kvintový kruh. Analogicky to platí aj pre interval čistej kvarty s počtom poltónov päť.

Ak za základný tón stupnice bude považovaný tón *c*, kroky napríklad intervalu *malej tercie* pokryjú iba nasledovné tóny: *c, dis, fis, a,* $c^1$ atď. Evidentnosť nemožnej existencie terciového kruhu sa ľahko overí vzorcom (m,n) = x. Malá tercia obsahuje tri poltóny a dosadením do vzorca dostávame neznámu x rovnú číslu 3, pričom číslo 3 sa nerovná číslu 1. Z tohto vyplýva, že terciový kruh v hudobnej teórii existovať nemôže.

### 1.4 Jean-Philippe Rameau

Najznámejší francúzsky skladateľ a hudobný teoretik z obdobia hudobného baroka, **Jean-Philippe Rameau** (1683 – 1764), sa zaslúžil dve tisícročia po Pytagorovi o jedno z najdôležitejších spojení hudby – expresívneho a kreatívneho umenia – a matematiky – prísnej, exaktnej a deduktívnej vedy.

Matematickej následnosti celých kladných čísel dal hudobný podtón. Veril totiž, že nekonečný sled celý čísel je elegantne zahrnutý v prírode pod maskou sérii frekvencií. Vo svojom diele *Traité de l'Harmónia réduite à Ses Principes Naturels* voľne preloženom ako Pojednanie o harmónii zredukovanej na jej prírodné zákony tvrdí, že ak nejaký hudobný nástroj vibruje, vytvára sa dlhé periodické kolísanie tlaku vzduchu, následne sa táto akustická vlna zvyšuje a násobí a po zasiahnutí našich uší počujeme hudobný tón. Takýto hudobný tón je teda zvyčajne vrstvením základného tónu a jeho alikvotných tónov a frekvenciu alikvotných tónov nazývame **harmonickou frekvenciou**[8] (Shah 2010).

J.-Ph. Rameau objavil to, že harmonické frekvencie sú vlastne násobkami frekvencie základných tónov a tieto násobky sú dané kladnými číslami, ako je možné vidieť frekvencie alikvotných tónov *komorného a* na obrázku 5.

[5] Delenie na centy však vzniklo až v 19. storočí ako pomôcka presného merania.
[6] f je frekvencia a x je hľadaný počet centov.
[7] Najväčší spoločný deliteľ je číslo 1.
[8] Ľudské ucho môže čisto teoreticky počuť spolu so základným tónom prvé štyri, maximálne prvých päť alikvotných tónov.

| | frekvencia / kmitočet | Interval |
|---|---|---|
| základný tón, tón $a^1$ | 440Hz | |
| 1. alikvotný tón | 2x440Hz = 880Hz | $\frac{880}{440} = 2$ |
| 2. alikvotný tón | 3x440Hz = 1320Hz | $\frac{1320}{880} = 1,5$ |
| 3. alikvotný tón | 4x440Hz = 1760Hz | $\frac{1760}{1320} = 1,\overline{3}$ |

Obrázok 5 Alikvotné tóny komorného a
(Zdroj: autor)

Jean-Philippe Rameau do svojom diele došiel k záveru, že odkedy sú základné objekty v matematike odvodené od sledov kladných celých čísel a odkedy tieto sekvencie pokračujú v hudbe, matematika ako kráľovná vied je sama súčasťou umenia hudby (Shah 2010).

## 2 Matematika a hudobné formy

Matematika a čísla ako také sa nachádzajú v hudbe nielen v podobe vzorcov a zložitých výpočtov, ale v priebehu dejín hudby ich často môžeme vidieť na miestach, kde nadobúdajú úplne iné rozmery a významy. Stávali sa symbolmi a mnohokrát určovali aj vnútorné usporiadanie skladby, t.j. hudobnú formu.

Hudobné formy ako oblasť hudby nemožno oddeliť od hudobnej teórie, dejín hudby, náuky o hudobných nástrojoch, hudobnej akustiky a i. Nie je teda žiadnym prekvapením, že v priebehu ľudských dejín rôzne hudobné formy vznikali, modifikovali sa a neraz charakterizovali to, či oné hudobné obdobie. A to často s číslami vo vnútri, ukrytými ozaj rafinovaným spôsobom.

### 2.1 Zlatý rez

**Leonardo Fibonacci** žijúci približne v rokoch 1175 – 1250, známy tiež ako Leonardo z Pisy alebo Leonardo Bonacci, bol talianskym matematikom označovaným za najoriginálnejšieho a najschopnejšieho matematika stredovekého kresťanského sveta. V roku 1202 vo svojej knihe *Liber Abaci* preloženej ako Kniha o abaku nielenže uviedol indo-arabské číslice a desiatkovú sústavu, ale vyvinul tiež matematickú teóriu konštruujúcu nekonečnú postupnosť čísel, ktorá začína dvomi jednotkami. Tá nesie jeho meno a jej charakteristikou je, že od tretieho člena sa každý ďalší člen postupnosti rovná súčtu predchádzajúcich dvoch členov (Pickover 2012). Prvými členmi tejto **Fibonacciho postupnosti** sú teda čísla: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 atď.

Predelením čísla *a* Fibonacciho postupnosti číslom *b*, ktoré číslu *a* predchádza, vznikne postupnosť **Fibonacciho zlomkov**:

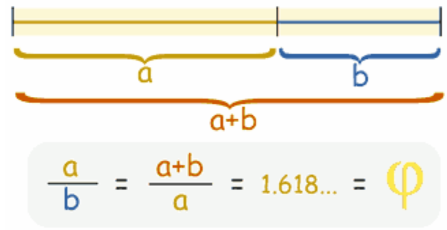
$$p(1) = \frac{1}{1} = 1,\ \ p(2) = \frac{2}{1} = 2,\ \ p(3) = \frac{3}{2} = 1{,}5,\ \ p(4) = \frac{5}{3} = 1{,}67,\ \ p(5) = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ atď.}$$

Táto postupnosť zlomkov sa približuje – konverguje – ku konštante nazývanej **zlatý pomer**, zlaté číslo či zlatý rez. Je to iracionálne číslo fí definované takto: φ = 1,6180339...[9].

Pojem zlatý rez však už ako prvý zadefinoval starogrécky filozof a matematik **Euklides** asi okolo roku 300 p. n. l. Približne o dvetisíc rokov neskôr, v roku 1509, o zlatom reze pojednávalo dielo *Divina proportione* – O božskom pomere, ktorého autorom bol taliansky františkánsky mních a matematik **Luca Bartolomeo Pacioli** žijúci na prelome 15. a 16. storočia. Vysvetlil, že tajomstvu zlatého rezu možno najlepšie porozumieť len vtedy, ak úsečku rozdelíme na dve rôzne dlhé časti tak, aby pomer dlhšieho úseku úsečky ku kratšiemu bol rovný pomeru celej úsečky k dlhšej časti (Pickover 2012) – pozri obrázok 6[10].

[9] Aj keď sa Fibonacciho postupnosť zlomkov k číslu φ nikdy nedostane, už od desiateho miesta postupnosti je odchýlka od zlatého čísla menšia, než jedna tisícina (Jackson 2013).

[10] Úsečky a, b z obrázka 7 sa zhodujú s členmi Fibonacciho postupnosti, kde číslu a predchádza číslo b.




Obrázok 6 Zlatý pomer
(Zdroj: Goldenratio 2014 – 2015-04-17 16:00)

Zlatý rez robí objekty nášho sveta estetickejšími, krajšími, vyrovnanejšími. Nachádza sa v prírode, ale aj pri mohutných stavbách v architektúre ako napríklad v prípade majestátnych pyramíd. Zlatý rez však činí krásnymi aj všetky umelecké diela, v ktorých sa nachádza. Využívali ho mnohí spisovatelia práve na mieste vyvrcholenia zápletky, maliari na dosiahnutie dojmu krásy a harmónie, ale aj skladatelia pri generovaní rytmických zmien, vyvinutí melodickej línie alebo hudobnom načasovaní kompozície (Shah 2010). Božský pomer bol nájdený v mnohých kompozíciách slávnych skladateľov.

### 2.1.1 Zlatý rez v diele J. S. Bacha

**Johanna Sebastiana Bacha** (1685 – 1750), najvýznamnejšieho barokového skladateľa a tvorivého génia, ktorého hudba presahuje všetok čas, si ctia hudobníci po celom svete. Jeho dielo právom leží na vrchole hudobnej tvorby a je vysoko cenené a rešpektované. Zručnosti, nadanie a genialita, ktorou disponoval mu umožnili skomponovať množstvo slávnych kompozícií, medzi ktoré bezpochyby patrí aj dielo *Das Wohltemperierte Clavier* - Dobre temperovaný klavír[11], kde možno nájsť princíp zlatého rezu na miestach významnej zmeny v štruktúre alebo harmonického uvoľnenia.

Prvý spôsob použitia zlatého rezu, t.j. v mieste zmeny v štruktúre, je možné všimnúť si v *Prelúdiu č. 3 v tónine Cis dur* (porov. Príloha č. 1 Prelúdium č. 3 – Cis dur, BWV[12] 848) z prvého zväzku *Dobre temperovaného klavíra* z roku 1722. Bach toto prelúdium otvára motívom, ktorý je založený na neustálom behu šestnástinových nôt fungujúcich ako rytmický základ celej skladby. Všadeprítomnosť týchto čo do hodnoty drobných nôt akoby odopierala poslucháčovi oddych. V takte 63 skladateľ nielenže píše dominantný akord *Gis dur*, ktorý na konci skladby rozvinie do toniky, ale mení aj štruktúru skladby. Náhla zmena narúša u poslucháča prvotný šestnástinový model a ovplyvňuje časové plynutie skladby. Posun však nastáva aj v rytmickom vyvrcholení. Zlatý rez sa tak v tejto skladbe nachádza v 64. takte, čo je len jeden takt po začatí rytmického posunu v pravej ruke. Z matematického hľadiska sa k nemu možno dostať nenáročným spôsobom, podielom celkového počtu taktov v prelúdiu, t.j. 104, a zlatého čísla fí, t.j. 1,618. Výsledkom je číslo 64,2 (Cruz 2007).

Jedna z najznámejších melódií, Bachovo *Prelúdium č. 1 v tónine C dur* (porov. Príloha č. 2 Prelúdium č. 1 – C dur, BWV 846) rovnako z prvého zväzku *Dobre temperovaného klavíra*, nám ponúka priam ukážkový príklad toho, ako zlatý rez môže byť miestom anticipácie návratu do toniky a tým pádom aj miestom uvoľnovania vzniknutého napätia. Rozhodujúcim prvkom je zmenšený septakord v 22. takte. V 24. až 31. takte je využitý tzv. organový bod na dominante v base, ktorý sa na konci skladby mení na tón *C* pre upevnenie tonálneho centra. Zlatý rez tohto známeho prelúdia leží v takte 21[13] a to pred objavením tónu *Fis* v base (Cruz 2007).

Nedá sa však nevšimnúť si drobné nepresnosti pri určovaní miesta zlatého rezu a preto nie je úplne zrejmé, či Bach používal zlatý rez vedome, alebo ide len o náhodu.

[11] Prvý zväzok tohto diela Bach dokončil v roku 1722 v Köthene. Obsahuje prelúdium a fúgu v každej molovej a durovej tónine, t.j. celkom dvadsaťštyri prelúdií a fúg. Druhý zväzok, ktorý obsahuje zhodný počet prelúdií a fúg J. S. Bach skomponoval o dvadsaťdva rokov neskôr. Týchto štyridsaťosem skladieb navždy zabezpečili Bachovi slávu majstra skladieb pre klávesové nástroje (Dowley 1994).

[12] Skratka BWV označuje súborný katalóg diel J. S. Bacha s nemeckým názvom ***B**ach **W**erke **V**erzeichnis,* prel. Zoznam Bachových skladieb. V roku 1950 ho publikoval nemecký muzikológ Wolfgang Schmieder.

[13] Číslo 35, t.j. počet taktov prelúdia, po predelení zlatým číslom fí dáva výsledok 21,6.

### 2.1.2 Zlatý rez v diele W. A. Mozarta

Hudba **Wolfganga Amadea Mozarta** (1756 – 1791), ktorého spolu s Josephom Haydnom a Ludwigom van Beethovenom radíme do hudby viedenského klasicizmu, najlepšie vystihuje povahu tohto hudobného obdobia. Charakteristická je svojou jasnosťou, bohatstvom melódií, vyváženou inštrumentáciou a dokonale brilantnou formou. Jeho diela disponujú nie len rýchlymi tempami, radosťou a hravosťou, ale aj príjemne meditatívnymi vetami, pričom nikdy nestrácajú jasnú zrozumiteľnosť.

Švajčiarsko-britský muzikológ 20. storočia **Eric Blom** tvrdil, že Mozart mal neomylný zmysel vyjadriť to pravé presne, v správny čas a v správnej dĺžke a **Henry-Frédéric Amiel**, švajčiarsky filozof 19. storočia, zas o Mozartovi napísal, že vyrovnanosť celku v jeho hudbe oplýva dokonalosťou (Roberts 2012). Aj napriek tomu, že Mozarta považujeme predovšetkým za geniálneho skladateľa, ani matematika mu nebola cudzia. Na okrajoch mnohých jeho rukopisov sa našli rôzne matematické vzorce.

Súčasný profesor matematiky na univerzite v Michigane, **John Putz**, tvrdí, že sonáty W. A. Mozarta pozostávajú z dvoch úsekov: *expozície, rozvedenia a reprízy*, ktoré sú rozdelené do zlatého rezu. Zlatý rez pritom interpretuje nasledovne: kratší úsek dáva do pomeru s dlhším úsekom, z čoho dostáva číslo rovné 0,6180... (May 2014 – 2016-08-09 12:00) – pozri obrázok 7.


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \qquad \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \qquad \varphi = 0{,}6180$$

Obrázok 7 Zlatý rez podľa J. Putza
(Zdroj: Roberts 2012 – 2016-08-09 15:00)

Mozart skomponoval celkom devätnásť sonát, pričom dvadsaťdeväť častí v jeho osemnástich sonátach obsahuje zlatý rez alebo sa danému číslu priveľmi približuje. Dôkazom je napríklad *Sonata C dur, K.*[14] *279* skomponovaná roku 1774. Počty taktov jednotlivých častí – v poradí *Allegro, Andante, Allegro* – sú na obrázku 8.

TABLE 1

| Köchel | $a$ | $b$ | $a+b$ |
|---|---|---|---|
| 279, I | 38 | 62 | 100 |
| 279, II | 28 | 46 | 74 |
| 279, III | 56 | 102 | 158 |

Obrázok 8 Rozsah úsekov Sonáty C dur, K. 279 W. A. Mozarta
(Zdroj: Roberts 2012 – 2016-08-09 15:30)

Podľa definície zlatého rezu Johnom Putzom, t.j. výpočtom pomeru kratšieho úseku k dlhšiemu[15], možno zistiť, že úseky prvých dvoch častí, častí Allegro a Andante, sú v zlatom pomere alebo sa od neho len nepatrne líšia. V tretej časti sonáty sa však výsledky pomerov úsekov od zlatého rezu značne odchyľujú[16]. To nás vedie k záveru, že ani u Mozarta nemôžeme s úplnou istotou vyhlásiť, že sám o danom zlatom reze vedel a zámerne ho používal. Možno do svojich kompozícií zlatý pomer vsúval

[14] Skratka K. (resp. KV.) označuje súborný katalóg diel W. A. Mozarta, v nemčine *Köchelverzeichnis*. Katalóg zostavil v roku 1862 muzikológ a milovník Mozartovej hudby Ludwig Köchel a v roku 1947 katalóg doplnil muzikológ Alfred Einstein.

[15] t.j. $a/b$ a $(a+b)/b$

[16] Pomer úseku $a$ a $b$ je 0,5490... a pomer úseku $a+b$ a $b$ je 0,6455...

nevedomky, keďže toto zaujímavé spojenie matematiky a hudby je prítomné v toľkých aspektoch života, že aj hudbu činí pre človeka prirodzene zrozumiteľnejšou.

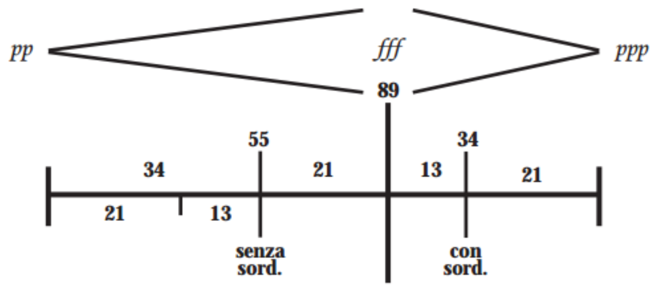
### 2.1.3 Zlatý rez v hudbe B. Bartóka

O čom v dielach J. S. Bacha a W. A. Mozarta môžeme len polemizovať, v diele svetoznámeho maďarského hudobného skladateľa a predstaviteľa hudby 20. storočia, **Bélu Bartóka** (1881 – 1945), si môžeme byť stopercentne istí. Jeho hudbu analyzoval hudobný teoretik Ernö Lendvai.

Vo svojich dielach, celkom 121 skladbách, sa odrážajú znaky originálnej syntézy maďarskej ľudovej a umeleckej hudby, zvukového a rytmického novátorstva. Oplýval nadšením z barbarského rytmu a blízko mal aj k zlatému rezu. Je známe, že ho Bartók zámerne využíval vo svojich kompozíciách. Napísal šesť sláčikových kvartet, pričom od tretieho z nich začína využívať tento matematický prvok. Zlatý rez sa však celkom zreteľne objavuje aj v *Hudbe pre sláčiky, bicie nástroje a čelestu* (1936), v jej prvej časti – *Andante tranquillo*.

Časť *Andante tranquillo* je veľkou a neobvyklou fúgou s jedinou témou v sláčikových nástrojoch. Má osemdesiatdeväť taktov a je rozdelená na dva diely, jeden 55-taktový, druhý 34-taktový, pričom predelom je najhlasnejší moment skladby. Umiestňovaním a odstraňovaním dusítok vznikajú ďalšie úseky, ktoré sú v zlatom pomere (Schnierer 1995).

Napríklad 55/89=0,6179..., čo je číslo veľmi blízke zlatému rezu, rovnako číslo 34/55=0,61818... – pozri obrázok 9.




Obrázok 9 Schéma časti Andante tranquillo Hudby pre sláčiky, bicie nástroje a čelestu B. Bartóka (Zdroj: Čunderlíková – Hatrík 2012)

Dané dielo patrí k reprezentatívnym umeleckým počinom hudby 20. storočia, čo potvrdila aj jeho premiéra v Basilei pod taktovkou Paula Sachera 21. apríla 1937 (Schnierer 1995).

## 3 Matematika v avantgardných smeroch hudby 20. a 21. storočia

Iste nemožno poprieť, že každé hudobné obdobie – od renesancie, cez barok až po romantizmus – oplýva svojou jedinečnosťou a originalitou. Avšak to, čo priniesla hudba 20. a 21. storočia sa dá týmito slovami len nejasne opísať. Variabilita smerov a štýlov, experimentovanie so zvukom v rámci elektroakustiky, princíp náhody, vysoký stupeň organizovanosti, či paralela s architektúrou sú len kvapkami v mori nazývanom hudba 20. a 21. storočia.

Všetko však mala vo svojej moci vznešená matematika. Začala ovplyvňovať rovnomerným spôsobom hudobný materiál a hudobnú formu súčasne. Tak dochádzalo tak k syntéze tohto pôsobenia.

### 3.1 Dodekafónia

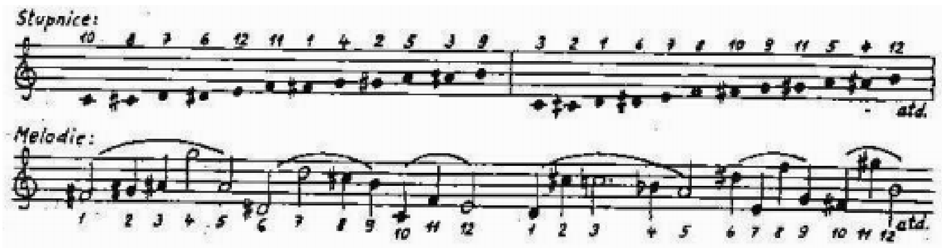
Pod pojmom dodekafónia rozumieme kompozičnú techniku, založenú na zrovnoprávnení všetkých dvanástich tónov chromatickej stupnice a na racionálnom organizovaní týchto tónov. Základným princípom je teda rovnomerné a pravidelné využívanie všetkých tónov chromatickej stupnice. V prísnej dodekafónii sa navyše nesmie žiaden tón chromatickej stupnice zopakovať skôr, kým nezaznie všetkých ostatných jedenásť tónov (Medňanský 2003).

Aj keď sa nedá presne určiť, kedy dvanásťtónový skladateľský systém vznikol, s prvými experimentálnymi snahami o vytvorenie dvanásťtónového systému sa stretávame už v prvých dvoch desaťročiach 20. storočia. Bol to extrémny maliar a skladateľ ukrajinskej národnosti **Jefim Golyšev** (1897 – 1970), ktorý sa stal tvorcom prvého predvedeného dvanásťtónového diela pod názvom *Sláčikové* *trio* z roku 1914. **Joseph Matthias Hauer** (1883 – 1959), rakúsky skladateľ a hudobný teoretik, sa vo svojom teoretickom diele *Vom Wesen des Musikalischen* (O hudobnej podstate) z roku 1920 pokúsil dvanásťtónový systém zadefinovať. Zapodieval sa melodickými líniami, ktoré vznikli z kombinácií dvanástich rôznych tónov a tým ich počet dosiahol astronomické číslo 12!=479 001 600. Všetky tieto možnosti vo všetkých transpozíciách následne usporiadal do 44 tabuliek – tropov. Nemecký skladateľ 20. storočia **Hermann Heiss** nazýval Hauerovu dvanásťtónovú metódu neľudskou, stelesnením myšlienky odosobnenia v hudbe a myšlienky mechanického priebehu tónov podľa vopred stanovených pravidiel (Kohoutek 1962).

K najprepracovanejšiemu dvanásťtónovému systému dospel až **Arnold Schönberg** (1874 – 1951), rakúsky skladateľ, ktorý významnou mierou zasiahol do vývoja hudby 20. storočia a považujeme ho za otca dodekafónie. Jeho najznámejším dielom je *Ten, ktorý prežil Varšavu* (1947) pre reč, mužský zbor a orchester na text samotného skladateľa.

### 3.1.1 Ako zostaviť dvanásťtónový rad?

Najjednoduchším spôsobom, ako bezchybne zostaviť dvanásťtónový rad je vypísať všetkých dvanásť tónov chromatickej stupnice. Každý tón následne očíslovať podľa toho, v akom poradí bol použitý a pritom dbať na základné pravidlá, z ktorých sú najdôležitejšie tieto dve: rad nesmie byť zhodný s chromatickou stupnicou, kvintovým alebo kvartovým kruhom a každý tón sa v tomto útvare môže vyskytovať nanajvýš jedenkrát (Kohoutek 1962). Rady tak môžeme zostavovať v horizontálnom smere – pozri obrázok 10, čo vedie k vzniku melódie, ale aj v smere vertikálnom – pozri obrázok 11, čím dochádza k vzniku harmónie.




Obrázok 10 Vznik melódie
(Zdroj: Zimová 2006)


Obrázok 11 Vznik harmónie
(Zdroj: Zimová 2006)

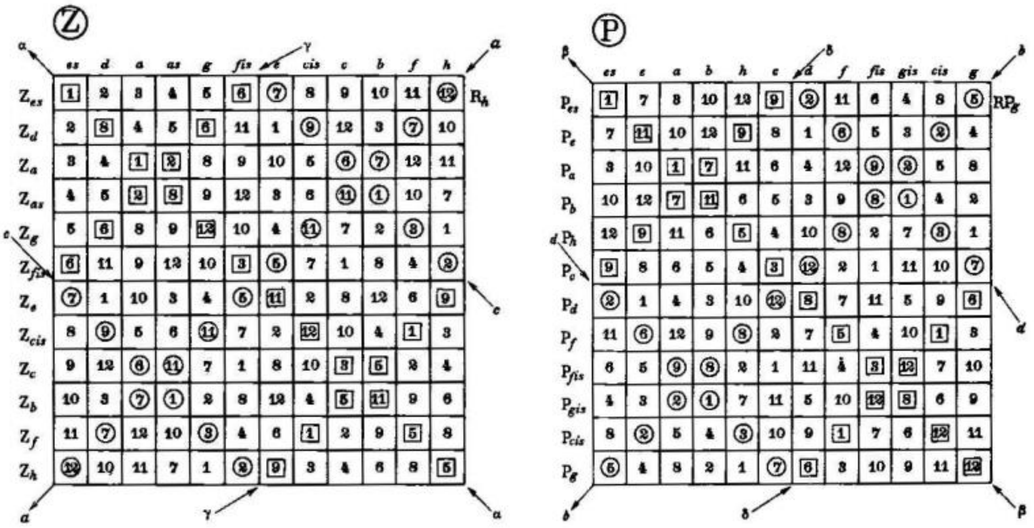
Je však nutné poznamenať, že číslo v dodekafónii môže nadobúdať dva významy. Buď označuje poradie jednotlivých tónov v rade, alebo označuje kvalitu intervalu. Napríklad pre rozpätie *malej sekundy* až *veľkej septimy* nadobúdajú čísla hodnoty 1 – 11. Navyše, aby mal skladateľ dostatočný počet materiálu, vytvára zo základného radu ďalšie tri rady: rak radu, horizontálnu inverziu radu a rak tejto horizontálnej inverzie.

### 3.2 Seriálna technika a serializmus

Čo sa organizovania hudobného materiálu týka, ide o vyšší stupeň než v dodekafónii. Tvorba sérií sa okrem melodickej línie týka aj metra, rytmu, dynamiky, farebnosti nástrojov, polôh samotných nôt, zmien tempa a agogiky či frázovania. V mnohých dielach skomponovaných touto technikou je organizácia hudobného materiálu tak dominantná, až možno hovoriť o **štrukturalizme**. Skladatelia vytvárali celé tabuľky, v ktorých vo forme čísel zaznamenávajú kompletný hudobný materiál, nevynímajúc ani jednu z jeho zložiek (Medňanský 2003).

Najvýznamnejším skladateľom, ktorý používal seriálnu techniku bol francúzsky skladateľ 20. storočia **Pierre Boulez** (1925 – 2016), známy svojimi transpozičnými tabuľkami, tzv. šachovnicami – pozri obrázok 12. Tie využil aj pri komponovaní diela *Polyphonie X* pre 17 sólových nástrojov.

Od základného radu a jeho inverzie vytvoril všetkých jedenásť možných transpozícií a zoradil ich pod seba. Vytvoril tak 12 a 12 radov, pomocou ktorých organizoval nielen výšku tónu, ale aj rytmus[17]. Zo šachovnice vybral tiež čísla pre organizáciu dynamiky, ktoré zakrúžkoval[18] a čísla pre artikuláciu[19], ktoré opísal štvorcami (Zimová 2006).



Z

| | es | d | a | as | g | fis | e | cis | c | b | f | h | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_{es}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $R_h$ |
| $Z_d$ | 2 | 8 | 4 | 5 | 6 | 11 | 1 | 9 | 12 | 3 | 7 | 10 | |
| $Z_a$ | 3 | 4 | 1 | 2 | 8 | 9 | 10 | 5 | 6 | 7 | 12 | 11 | |
| $Z_{as}$ | 4 | 5 | 2 | 8 | 9 | 12 | 3 | 6 | 11 | 1 | 10 | 7 | |
| $Z_g$ | 5 | 6 | 8 | 9 | 12 | 10 | 4 | 11 | 7 | 2 | 3 | 1 | |
| $Z_{fis}$ | 6 | 11 | 9 | 12 | 10 | 3 | 5 | 7 | 1 | 8 | 4 | 2 | |
| $Z_e$ | 7 | 1 | 10 | 3 | 4 | 5 | 11 | 2 | 8 | 12 | 6 | 9 | |
| $Z_{cis}$ | 8 | 9 | 5 | 6 | 11 | 7 | 2 | 12 | 10 | 4 | 1 | 3 | |
| $Z_c$ | 9 | 12 | 6 | 11 | 7 | 1 | 8 | 10 | 3 | 5 | 2 | 4 | |
| $Z_b$ | 10 | 3 | 7 | 1 | 2 | 8 | 12 | 4 | 5 | 11 | 9 | 6 | |
| $Z_f$ | 11 | 7 | 12 | 10 | 3 | 4 | 6 | 1 | 2 | 9 | 5 | 8 | |
| $Z_h$ | 12 | 10 | 11 | 7 | 1 | 2 | 9 | 3 | 4 | 6 | 8 | 5 | |

P

| | es | e | a | b | h | c | d | f | fis | gis | cis | g | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{es}$ | 1 | 7 | 3 | 10 | 12 | 9 | 2 | 11 | 6 | 4 | 8 | 5 | $RP_g$ |
| $P_e$ | 7 | 11 | 10 | 12 | 9 | 8 | 1 | 6 | 5 | 3 | 2 | 4 | |
| $P_a$ | 3 | 10 | 1 | 7 | 11 | 6 | 4 | 12 | 9 | 2 | 5 | 8 | |
| $P_b$ | 10 | 12 | 7 | 11 | 6 | 5 | 3 | 9 | 8 | 1 | 4 | 2 | |
| $P_h$ | 12 | 9 | 11 | 6 | 5 | 4 | 10 | 8 | 2 | 7 | 3 | 1 | |
| $P_c$ | 9 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 | 12 | 2 | 1 | 11 | 10 | 7 | |
| $P_d$ | 2 | 1 | 4 | 3 | 10 | 12 | 8 | 7 | 11 | 5 | 9 | 6 | |
| $P_f$ | 11 | 6 | 12 | 9 | 8 | 2 | 7 | 5 | 4 | 10 | 1 | 3 | |
| $P_{fis}$ | 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 1 | 11 | 4 | 3 | 12 | 7 | 10 | |
| $P_{gis}$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 7 | 11 | 5 | 10 | 12 | 8 | 6 | 9 | |
| $P_{cis}$ | 8 | 2 | 5 | 4 | 3 | 10 | 9 | 1 | 7 | 6 | 12 | 11 | |
| $P_g$ | 5 | 4 | 8 | 2 | 1 | 7 | 6 | 3 | 10 | 9 | 11 | 12 | |

Obrázok 12 Tabuľka základného (Z) radu a inverzie radu (P)
(Zdroj: Zimová 2006)

### 3.3 Stochastická[20] hudba

Ide o skladateľskú techniku, v ktorej výber jednotlivých zvukov vyplýva z použitia teórie pravdepodobnosti. Jej hlavným predstaviteľom bol grécky hudobný skladateľ, architekt a matematik **Iannis Xenakis** (1922 – 2001), ktorý chcel využitím stochastických zákonitostí dosiahnuť akýsi druh voľnej, improvizovanej a otvorenej hudby a s ňou spojenú úplne voľnú hudobnú formu.

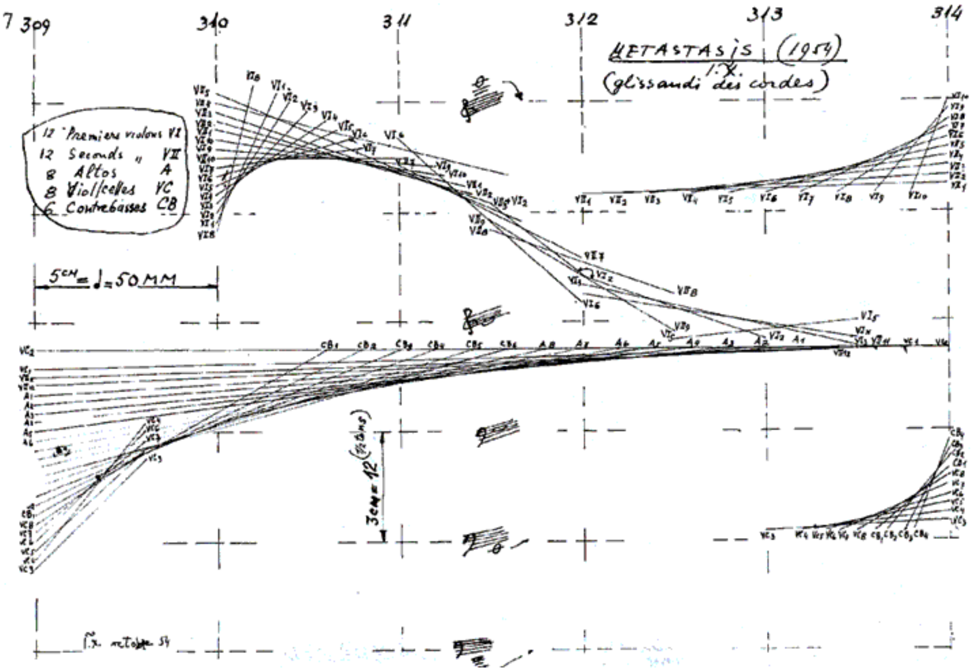
Skladbou *Metastaseis* (1953 – 1954) chcel dokázať, že k výsledkom dodekafonizmu a serializmu je možné dôjsť tiež vytvorením hudby založenej na zákonitostiach počtu pravdepodobností, čo na väčšej hudobnej ploche zaistí vznik obdobných hudobných útvarov. Keď Iannis Xenakis získal angažmán v parížskom ateliéri Le Corbusiera a kolaboroval pri návrhu *The Philips Pavilion* v Brusseli v roku 1958, skladba Metastaseis mu bola akousi predlohou, keď paraboly a hyperboly z pôvodnej partitúry našli svoje miesto aj pri výstavbe pavilónu (Medňanský 2016) – porovnaj obrázky 13 a 14.

[17] Každé číslo označovalo iný rytmus. Číslo 1 znamenalo dvaatridsatinovú notu, číslo 12 naopak štvrťovú notu s bodkou.

[18] Číslo 1 znamenalo pppp a číslo 12 ffff.

[19] Napríklad číslo 1 znamenal akcent, číslo 3 staccato, či číslo 8 sforzando.

[20] Z gr. stochastiké = náhodný.




Obrázok 13 Pôvodná partitúra skladby Metastaseis Iannisa Xenakisa
(Zdroj: Iannis Xenakis 2016 – 2016-08-09 18:55)

Obrázok 14 The Philips Pavilion
(Zdroj: Metastaseis 2016 – 2016-08-09 19:00)

**Záver**

Aj keby sme chceli akokoľvek namietať, matematiku – tú vznešenú kráľovnú vied – možno nájsť všade, a ani hudba nie je žiadnou výnimkou.

Už Pytagoras svojim matematickým myslením dokázal vyriešiť problém s ladením, ktoré zásluhou vývoja ľudského myslenia dosiahlo podobu dnes bežne používaného temperovaného ladenia. Matematika si však našla svoje miesto nie len v oblasti hudobnej akustiky, ale aj hudobnej formy, o čom svedčí zlatý rez v mnohých kompozíciách slávnych skladateľov. Takto sa kráľovná vied nestratila ani vo frmole hudby 20. a 21. storočia. Práve naopak, tam si nachádza svoje pevné miesto, stavia sa na piedestál slávy a zasahuje do oblastí , ktoré by sme jej možno nikdy nevložili do rúk.

Ale to by už hudba bez nej rozhodne nebola tým, čím je.

**Prílohy**

Príloha č. 1 Prelúdium č. 3 – Cis dur, BWV 848


p cresc.
mf
dimin.
cresc.
f
sf
dimin
cresc.
fz
EO 95
13

Príloha č. 2 Prelúdium č. 1 – C dur, BWV 846

pp
cresc.
dim.
cresc.
f
ff
dim.
p
p
ca — — lan — do
EO 95

## Literatúra:

ABRAHAM, G. (2003): *Stručné dejiny hudby.* Bratislava: Hudobné centrum.

HALUŠKA, J. (2006): *Hľadanie harmónie.* Bratislava: Veda, Vydavateľstvo SAV.

JACKSON, T. (2013): *Matematika (100 objavov, ktoré zmenili históriu)*. Slovak edition. Bratislava: Vydavateľstvo SLOVART, s. r. o.

KOHOUTEK, C. (1962): *Novodobé skladebné teorie západoevropské hudby*. Praha: Státní hudební nakladatelství.

MAREK, V. (2000): *Tajné dějiny hudby*. Praha: Eminent v spolupráci s Knižním klubem, k. s.

MEDŇANSKÝ, K. (2003): *Druhá viedenská škola a jej vplyv na vývoj slovenskej hudby.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum v Prešove.

MEDŇANSKÝ, K. (2016): Osobné konzultácie dňa 22. 3. 2016.

PICKOVER, C. (2012): *Matematická kniha. Od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky*. Prvnívydání v českém jazyce. Praha: Dokořán.

RUŠČIN, P. (2001): *Dejiny európskej hudby od antiky po nástup hudobnej moderny.* Prešov: Prešovská univerzita v Prešove.

SCHNIERER, M. (1995): *Svět orchestru 20. století I.* Brno: M a M.

ŠPELDA, A. (1978): *Hudební akustika.*Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

## Internetové zdroje:

COOK, J.: Circle of fifths and number theory. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://www.johndcook.com/blog/2009/10/02/circle-of-fifths-number-theory/

CRUZ, J.: The Aesthetic Relevance of the Golden Section in The Well-Tempered Clavier by J. S. Bach: The Relationship between Form, Temporal Flow, and Proportional Balance. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=ucin1182395578&disposition=inline

ČUNDERLÍKOVÁ, E. – HATRÍK, J.: Kapitoly z integratívnej umeleckej pedagogiky a didaktiky. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://www.mpc-edu.sk/library/files/cunderlikova_web.pdf

Golden ratio. [Cit. 2015-04-17]. Dostupné na internete: http://www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html

MAKEIG, S.: Means, Meaning and Music: Pythagoras, Archytas and Plato. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://www.ex-tempore.org/means/means.htm

MAY, M.: Did Mozart Use the Golden Section? [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://www.americanscientist.org/issues/pub/did-mozart-use-the-golden-section

Metastaseis (Xenakis). [Cit. 2016-08-09]. Dostupné na internete: https://en.wikipedia.org/wiki/Metastaseis_(Xenakis)#/media/File:Expo58_building_Philips.jpg

Musicas Meaningful Vibrations: TheMonocord. [Cit. 2015-04-15.] Dostupné na internete: http://www.ardue.org.uk/university/intro/sound.html#cont

ROBERTS, G.: Mozart´s Piano Sonatas and the Golden Ratio. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/2012/Handouts/Lectures/Mozart-web.pdf

SHAH, S.: An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/01/covered/MIMS_ep2010_103.pdf

ZIMOVÁ, K: Estetické aspekty dodekafonie a serialismu. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: https://is.muni.cz/th/108803/ff_b/bakalar.prace.pdf

ZOGRAFOS, M.: Iannis Xenakis: the aesthetics of his early works. [Cit. 2016-08-09.] Dostupné na internete: http://www.furious.com/perfect/xenakis.html

## Pramene:

BACH, Johann Sebastian (1983): *Dobře temperovaný klavír I. Das wohltemperierte Klavier I.* Praha: Editio Supraphon